# Beoordelingsmodel

| Vraag | Antwoord | Scores |
|---|---|---|

## Snijden met een hoogtelijn

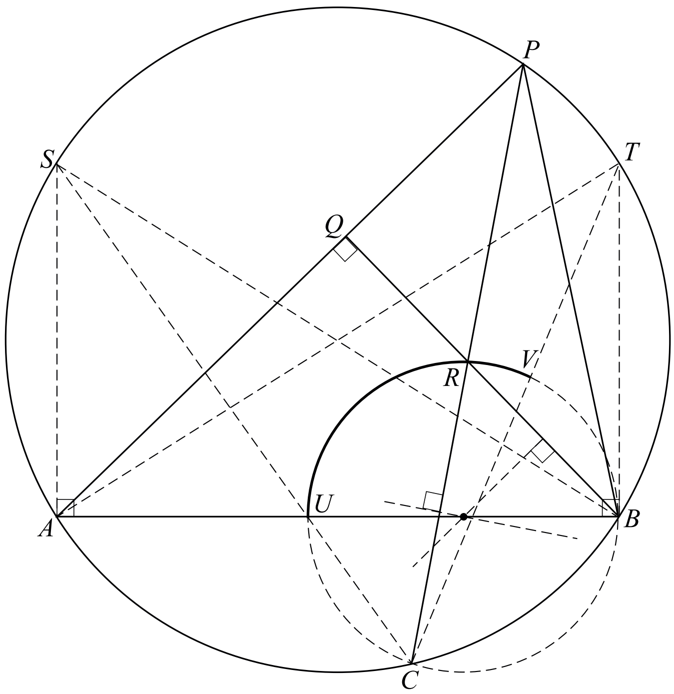
**1 maximumscore 4**

- $\angle BRC = \angle PRQ$; *overstaande hoeken* 1
- $\angle PRQ = 90° - \angle QPR$; *hoekensom driehoek* 1
- Boog $AC$ is constant, dus $\angle APC$ is constant; *constante hoek* 1
- $\angle QPR\ (= \angle APC)$ is constant, dus $\angle BRC$ is constant 1

of

- De bogen $CB$ en $AB$ zijn constant, dus $\angle CPB$ en $\angle APB$ zijn constant; *constante hoek* 2
- $\angle PBQ = 90° - \angle QPB$ $(= 90° - \angle APB)$, dus $\angle PBQ$ is constant; *hoekensom driehoek* 1
- $\angle BRC = \angle PBQ + \angle CPB$ is dus ook constant; *buitenhoek driehoek* 1

**2 maximumscore 5**




- $\angle BRC$ is constant, dus de baan van $R$ is een cirkelboog; (*constante hoek*) 1
- Het tekenen van de cirkel door $B$, $C$ en $R$, met toelichting (bijvoorbeeld door het middelpunt met behulp van de middelloodlijnen van $BR$ en $CR$ te tekenen) 2
- Driehoek $ABP$ mag niet stomphoekig zijn, dus $P$ doorloopt de kortste cirkelboog $ST$, met $S$ en $T$ de snijpunten met de cirkel van de loodlijnen in $A$ en in $B$ op de lijn $AB$ (zie tekening) 1
- Het tekenen van de punten $U$ en $V$ en het aangeven van de gevraagde cirkelboog $UV$ 1

*Opmerkingen*
*Als, bijvoorbeeld op grond van een aantal geconstrueerde punten, een baan is getekend die lijkt op een cirkelboog, maar niet is vermeld dat de baan van R een cirkelboog is, maximaal 3 scorepunten toekennen.*
*Als alleen de twee eindpunten zijn getekend, maximaal 1 scorepunt toekennen.*

## De leercurve

**3 maximumscore 4**

- $\frac{85}{100} = \frac{T_1 \cdot (2n)^{-a}}{T_1 \cdot n^{-a}}$ 1
- Herleiden tot $0,85 = 2^{-a}$ 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- $a \approx 0,23$ 1

of

- Kiezen van een waarde voor $T_1$ en $n$, bijvoorbeeld $T_1 = 20$ en $n = 2$ 1
- $\frac{85}{100} = \frac{20 \cdot 4^{-a}}{20 \cdot 2^{-a}}$ 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- $a \approx 0,23$ 1

of

- $n = 2$ invullen in de formule van Wright geeft $T_2 = T_1 \cdot 2^{-a}$, dus $\frac{T_2}{T_1} = 2^{-a}$ 1
- Opgelost moet worden $0,85 = 2^{-a}$ 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- $a \approx 0,23$ 1

**4 maximumscore 4**

- Berekend moet worden wat de kleinste gehele waarde van $n$ is waarvoor geldt $40 \cdot n^{-0,328} < 20 \cdot n^{-0,152}$ 2
- Beschrijven hoe deze waarde berekend kan worden 1
- Het antwoord: bij de 52e keer uitvoeren 1

**5 maximumscore 4**

- $T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_{100} \approx \int_{0,5}^{100,5} 20 \cdot x^{-0,152} \mathrm{d}x$ 1
- Een primitieve van $20 \cdot x^{-0,152}$ is $\frac{20}{0,848} \cdot x^{0,848}$ 1
- De oppervlakte is ongeveer $(\frac{20}{0,848} \cdot 100,5^{0,848} - \frac{20}{0,848} \cdot 0,5^{0,848} \approx) 1163$ 1
- Dus de gemiddelde tijdsduur is $\frac{1163}{100} \approx 12$ (seconden) 1

## Een exponentiële functie

**6 maximumscore 4**

- Voor de $x$-coördinaat van $A$ geldt $f'(x)=0$ — 1
- $f'(x)=\dfrac{8\cdot e^x - 8x\cdot e^x}{(e^x)^2}$ — 2
- Oplossen van $f'(x)=0$ geeft $x = 1$ (dus de $x$-coördinaat van $A$ is 1) — 1

**7 maximumscore 4**

- Onderzocht moet worden hoe ver de snijpunten van de lijn $y = 2$ met de grafiek van $f$ uit elkaar liggen — 1
- Beschrijven hoe de oplossingen van de vergelijking $f(x)=2$ berekend kunnen worden — 1
- De oplossingen zijn $x\approx 0{,}4$ en $x\approx 2{,}2$ — 1
- Het verschil tussen deze twee waarden van $x$ is kleiner dan 2, dus het past niet — 1

of

- $f(a)=f(a+2)$ geeft $\dfrac{8a}{e^a}=\dfrac{8(a+2)}{e^{a+2}}$ — 1
- Beschrijven hoe de oplossing van deze vergelijking berekend kan worden — 1
- $a\approx 0{,}313$ — 1
- $f(0{,}313)\approx 1{,}8<2$, dus het past niet — 1

**8 maximumscore 5**

- $f(x) = g_n(x)$ geeft $\frac{8x}{e^x} = \frac{8nx}{e^{nx}}$ — 1
- Dit geeft $8x \cdot e^{nx} = 8nx \cdot e^x$ — 1
- Dus $e^{(n-1)x} = n$ (of $x = 0$) — 2
- Dit geeft (voor $n > 0$) $(n-1)x = \ln n$, dus (voor $n > 0$ en $n \neq 1$) $x = \frac{1}{n-1}\ln n$ (dus de formule klopt voor elke positieve waarde van $n$ met $n \neq 1$) — 1

of

- (Voor $n > 0$ en $n \neq 1$ geldt) $g_n(\frac{1}{n-1}\ln n) = \frac{8n \cdot \frac{1}{n-1}\ln n}{e^{\frac{n}{n-1}\cdot \ln n}}$ — 1
- (Voor $n > 0$ en $n \neq 1$ geldt) $f(\frac{1}{n-1}\ln n) = \frac{8 \cdot \frac{1}{n-1}\ln n}{e^{\frac{1}{n-1}\ln n}}$ — 1
- Hieruit volgt $f(\frac{1}{n-1}\ln n) = \frac{8n \cdot \frac{1}{n-1}\ln n}{n \cdot e^{\frac{1}{n-1}\ln n}}$ — 1
- Dit geeft $f(\frac{1}{n-1}\ln n) = \frac{8n \cdot \frac{1}{n-1}\ln n}{e^{\ln n} \cdot e^{\frac{1}{n-1}\ln n}} = \frac{8n \cdot \frac{1}{n-1}\ln n}{e^{\ln n + \frac{1}{n-1}\ln n}}$ — 1
- Dus $f(\frac{1}{n-1}\ln n) = \frac{8n \cdot \frac{1}{n-1}\ln n}{e^{(1+\frac{1}{n-1})\ln n}} = \frac{8n \cdot \frac{1}{n-1}\ln n}{e^{\frac{n}{n-1}\ln n}}$ (dus de formule klopt voor elke positieve waarde van $n$ met $n \neq 1$) — 1

**9 maximumscore 4**

- De rechtergrens van het gebied is gelijk aan $x_{snijpunt} = \frac{1}{2}\ln 3$ (of 0,549) — 1
- De gevraagde oppervlakte is $\int_0^{\frac{1}{2}\ln 3} (g_3(x) - f(x))\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}\ln 3} \left(\frac{24x}{e^{3x}} - \frac{8x}{e^x}\right)dx$ — 1
- Beschrijven hoe deze integraal berekend kan worden — 1
- Het antwoord: (ongeveer) 0,46 — 1

## Wortelfuncties

**10 maximumscore 8**

- $12+6\sqrt{x-12}=x$ geeft $6\sqrt{x-12}=x-12$ — 1
- Hieruit volgt $36(x-12)=(x-12)^2$ — 1
- Dus $x-12=0$ of $x-12=36$ — 1
- De $x$-coördinaten van de snijpunten zijn 12 en 48 — 1
- De oppervlakte van het vlakdeel is $\int_{12}^{48}(12+6\sqrt{x-12}-x)\mathrm{d}x$ — 1
- Een primitieve van $12+6\sqrt{x-12}-x$ is $12x+4(x-12)\sqrt{x-12}-\frac{1}{2}x^2$ (of een minder ver uitgewerkte vorm) — 2
- De oppervlakte is 216 — 1

**11 maximumscore 6**

- $f_n(n+9)=n+18$, dus $(n+9,\ n+18)$ ligt op de grafiek van $f_n$ — 1
- $(n+9,\ n+18)$ ligt ook op lijn $k$ (want $n+18=(n+9)+9$) — 1
- $f_n'(x)=\dfrac{3}{\sqrt{x-n}}$ — 2
- $f_n'(n+9)=\dfrac{3}{\sqrt{n+9-n}}=1$ — 1
- De richtingscoëfficiënt van $k$ is ook 1 (dus de grafiek van $f_n$ raakt lijn $k$ in het punt met $x$-coördinaat $n+9$) — 1

of

- $f_n'(x)=\dfrac{3}{\sqrt{x-n}}$ — 2
- De richtingscoëfficiënt van $k$ is 1, dus de raaklijn in een punt van de grafiek van $f$ heeft dezelfde richting als $k$ als voor de $x$-coördinaat van dat punt geldt $f_n'(x)=1$ ofwel $\dfrac{3}{\sqrt{x-n}}=1$ — 1
- $\dfrac{3}{\sqrt{x-n}}=1$ oplossen geeft $x=n+9$ — 1
- $f_n(n+9)=n+18$, dus $(n+9,\ n+18)$ is het punt van de grafiek van $f_n$ waarin de raaklijn dezelfde richting heeft als $k$ — 1
- $(n+9,\ n+18)$ ligt ook op lijn $k$ (want $n+18=(n+9)+9$) (dus de grafiek van $f_n$ raakt lijn $k$ in het punt met $x$-coördinaat $n+9$) — 1

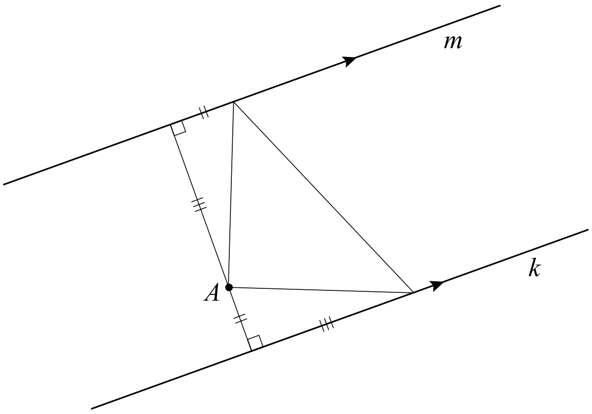
## Zoek de geodriehoek

**12 maximumscore 4**

- $\angle PSQ = 90°$, dus $\angle PQS = 90° - \angle SPQ$; *hoekensom driehoek* 1
- $\angle RPQ = 90°$, dus $\angle RPT = 180° - 90° - \angle SPQ = 90° - \angle SPQ$; *gestrekte hoek* 1
- Dus $\angle PQS = \angle RPT$ 1
- Verder $PQ = RP$ en $\angle PSQ = \angle RTP$, dus $\Delta PQS \cong \Delta RPT$; *ZHH* 1

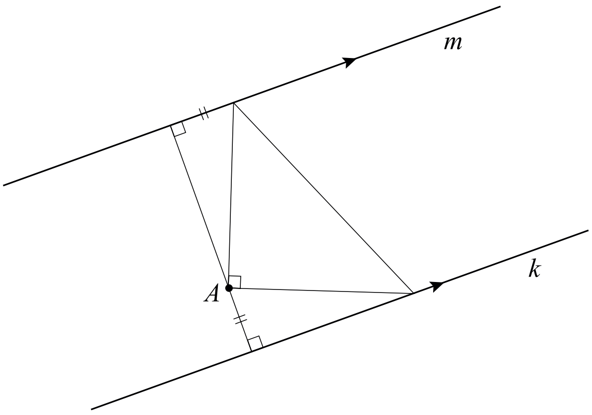
**13 maximumscore 3**

- Met de afstanden van $A$ tot de beide lijnen congruente driehoeken tekenen zoals in de onderstaande tekening 2
- De rest van de tekening 1




of

- Gelijke lijnstukken tekenen zoals in de onderstaande tekening 1
- Het tekenen van de rechte hoek bij $A$ 1
- De rest van de tekening 1




*Opmerking*
*Als niet een manier is gevolgd die gebruik maakt van de beschreven congruente driehoeken, dan voor deze vraag geen scorepunten toekennen.*

## Gebroken functie

**14** **maximumscore 5**

- $f_a'(x) = a - \frac{1}{x^2}$ 1
- $a - \frac{1}{x^2} = 0$ geeft de (positieve) oplossing $x = \sqrt{\frac{1}{a}}$ (dus de $x$-coördinaat van de top is $\sqrt{\frac{1}{a}}$ $(= \frac{1}{\sqrt{a}})$) 1
- De $y$-coördinaat van de top is $a \cdot \sqrt{\frac{1}{a}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a}}}$ $(= \sqrt{a} + \sqrt{a} = 2\sqrt{a}\,)$ 1
- $\sqrt{\frac{1}{a}} \cdot \left( a \cdot \sqrt{\frac{1}{a}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a}}} \right) = a \cdot \frac{1}{a} + 1 = 2$, dus $c = 2$ (en de toppen liggen op de hyperbool $xy = 2$ ) 2

of

- $f_a'(x) = a - \frac{1}{x^2}$ 1
- $a - \frac{1}{{x_{top}}^2} = 0$ geeft $a = \frac{1}{{x_{top}}^2}$ 1
- Invullen in $y_{top} = a \cdot x_{top} + \frac{1}{x_{top}}$ geeft $y_{top} = \frac{1}{x_{top}} + \frac{1}{x_{top}} = \frac{2}{x_{top}}$ 1
- Hieruit volgt $x_{top} \cdot y_{top} = 2$, dus $c = 2$ (en de toppen liggen op de hyperbool $xy = 2$ ) 2

## Rechthoeken bij een kwartcirkel

**15 maximumscore 5**

- $V(t) = \frac{1}{2}\sin t \cdot (1 + \cos t)$ (met $0 < t < \frac{1}{2}\pi$) 1
- $W(t) = \frac{1}{2}\sin t \cdot (1 - \cos t)$ (met $0 < t < \frac{1}{2}\pi$) 1
- $V(t) = 3 \cdot W(t)$ als $1 + \cos t = 3 - 3\cos t$ (met $0 < t < \frac{1}{2}\pi$) 1
- Dus $\cos t = \frac{1}{2}$ (met $0 < t < \frac{1}{2}\pi$) 1
- Het antwoord: $t = \frac{1}{3}\pi$ 1

**16 maximumscore 4**

- Aangetoond moet worden dat $\dfrac{\frac{1}{2}(1 + \cos t)}{\sin t} = \dfrac{\frac{1}{2}\sin t}{1 - \cos t}$ (voor $0 < t < \frac{1}{2}\pi$) 1
- Dit is (voor $0 < t < \frac{1}{2}\pi$) gelijkwaardig met $(1 + \cos t)(1 - \cos t) = \sin^2 t$ 1
- Dit is gelijkwaardig met $1 - \cos^2 t = \sin^2 t$ 1
- Dit is waar voor elke waarde van $t$ (omdat $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$) 1

| Vraag | Antwoord | Scores |
|---|---|---|

**17 maximumscore 7**

- $\frac{ON}{OQ}=\frac{RA}{RS}$ geeft $\frac{\frac{1}{2}(1+\cos t)}{\sin t}=\frac{1-\cos t}{\frac{1}{2}\sin t}$ — 1
- Hieruit volgt $1+\cos t=4(1-\cos t)$ — 2
- Dus $\cos t=\frac{3}{5}$ — 2
- De zijde van vierkant *ONPQ* is $\frac{4}{5}$ en de zijde van vierkant *ATSR* is $\frac{2}{5}$ — 2

of

- Beide rechthoeken zijn vierkant als $\sin t=\frac{1}{2}(1+\cos t)$ en $\frac{1}{2}\sin t=1-\cos t$ — 2
- Hieruit kan $\sin t$ berekend worden door $\cos t$ te elimineren (of: hieruit kan $\cos t$ berekend worden door $\sin t$ te elimineren) — 1
- Elimineren van $\cos t$ geeft $\sin t=\frac{4}{5}$ (of: elimineren van $\sin t$ geeft $\cos t=\frac{3}{5}$) — 2
- De zijde van vierkant *ONPQ* is $\frac{4}{5}$ en de zijde van vierkant *ATSR* is $\frac{2}{5}$ — 2

of

- Rechthoek *ATSR* is vierkant als $\frac{1}{2}\sin t=1-\cos t$ — 1
- Hieruit volgt (voor $0<t<\frac{1}{2}\pi$): $\frac{1}{2}\sqrt{1-\cos^2 t}=1-\cos t$ — 1
- Kwadrateren en uitwerken geeft $5\cos^2 t-8\cos t+3=0$ — 2
- Dus $\cos t=\frac{3}{5}$ (want $\cos t=1$ vervalt vanwege $0<t<\frac{1}{2}\pi$) — 1
- De zijde van vierkant *ONPQ* is $\frac{4}{5}$ en de zijde van vierkant *ATSR* is $\frac{2}{5}$ — 2

of

- Rechthoek *ONPQ* is vierkant als $\sin t=\frac{1}{2}(1+\cos t)$ — 1
- Hieruit volgt (voor $0<t<\frac{1}{2}\pi$): $2\sin t-1=\sqrt{1-\sin^2 t}$ — 2
- Kwadrateren en uitwerken geeft $5\sin^2 t-4\sin t=0$ — 1
- Dus $\sin t=\frac{4}{5}$ (want $\sin t=0$ vervalt vanwege $0<t<\frac{1}{2}\pi$) — 1
- De zijde van vierkant *ONPQ* is $\frac{4}{5}$ en de zijde van vierkant *ATSR* is $\frac{2}{5}$ — 2